

Spazio vettoriale
Euclideo

$\subseteq$

Spazio vettoriale
Normato

$\subseteq$

Spazio vett.
metrico

(con prod. scal.
definito positivo)

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\|\vec{v}\|$$

$$d(\vec{v}, \vec{w})$$

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

norma euclidea

$$d(\vec{v}, \vec{w}) := \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

$$\circ: V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

prod. scal.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \text{ e } \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$\|\vec{v}\| \geq 0$$

$$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$$

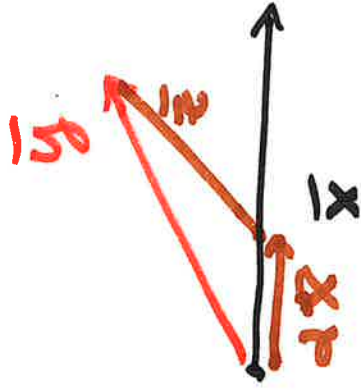
$$d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0 \text{ e}$$

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

$$d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{x}) + d(\vec{x}, \vec{w})$$

Proposizione: Sia $V_n^o(\mathbb{R})$ uno spazio vett. euclideo su $\mathbb{R}$.
e sia $\bar{x} \neq 0; \bar{y} \in V_n^o(\mathbb{R})$.

Allora $\bar{y}_{||}^{\bar{x}}$ è il vettore parallelo ad $\bar{x}$
tale che $\bar{y} - \bar{y}_{||}^{\bar{x}}$ è ortogonale a $\bar{x}$,
ossia $\alpha \bar{x} - \bar{y}_{||}^{\bar{x}}$ ha norma minima
fra tutti i possibili vettori di $V_n^o(\mathbb{R})$.



$$\bar{y} = \alpha \bar{x} + \bar{z} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z} = \bar{y} - \alpha \bar{x}$$

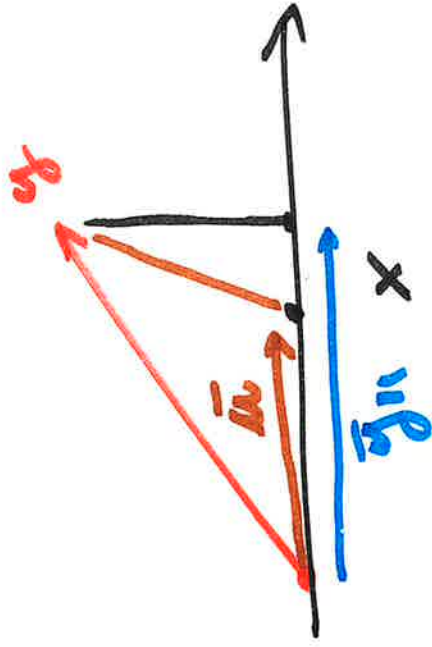
per quale valore di α

$\bar{z}$ ha norma minima?

voglio che $d(\bar{y}, \alpha \bar{x})$ sia la più piccola possibile.

$$d(\bar{y}, \alpha \bar{x}) = \|\bar{y} - \alpha \bar{x}\|$$

Risposta: quando $\alpha = \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}}$, ovvero quando $\bar{z} \perp \bar{y}$. In particolare $\bar{y}_{||}$ è il vettore parallelo ad $\bar{x}$ "più vicino" ad $\bar{y}$.



$$\text{Sia } \bar{y}_{||} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \bar{x}$$

$$\text{Sia } \bar{u} = \alpha \bar{x}$$

$$\text{calcoliamo } d(\bar{y}, \bar{u})^2 = \|\bar{y} - \bar{u}\|^2 = \|\bar{y}_{||} - \bar{u} + \bar{y}_{\perp}\|^2 =$$

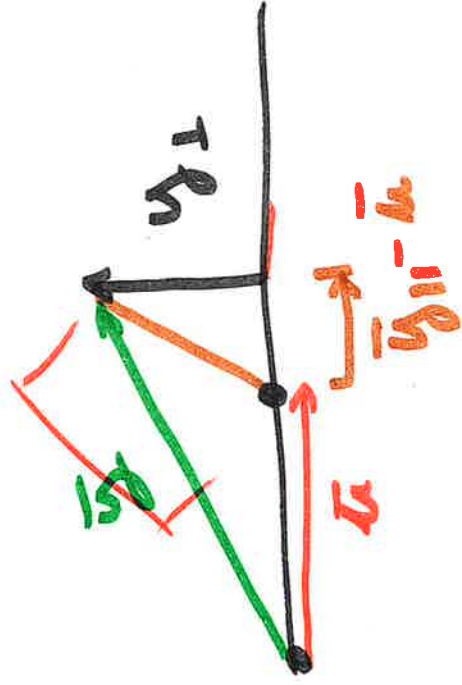
$$= (\bar{y}_{||} + \bar{y}_{\perp} - \bar{u}) \cdot (\bar{y}_{||} + \bar{y}_{\perp} - \bar{u}) =$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\bar{y}_n \cdot \bar{y}_n + \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_1 + \bar{u} \cdot \bar{u}}_{\text{green}} + \underbrace{\bar{y}_n \cdot \bar{y}_1 + \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_n + \bar{y}_n \cdot (-\bar{u})}_{\text{green}} - \underbrace{\bar{u} \cdot \bar{y}_n - \bar{u} \cdot \bar{y}_1}_{\text{green}} = \\ & + \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_n + \bar{y}_1 \cdot (-\bar{u}) \end{aligned}$$

$$m \quad y_1 \perp \bar{x} \Rightarrow \bar{y}_1 \perp \bar{u} \quad e \quad \bar{y}_1 \perp \bar{y}_n$$

$$= \underbrace{(\bar{y}_n - \bar{u}) \cdot (\bar{y}_n - \bar{u}) + \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_1}_{\geq 0} \geq \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_1$$

In particolare il minimo si ha se $\bar{y}_n = \bar{u}$ $\square$



$$\|\bar{y}_n - \bar{u}\|^2 + \|\bar{y}_1\|^2$$

$$= \|\bar{y}_n - \bar{u}\|^2$$

Teorema di Pitagora.

Teorema de Pitágoras.



$$\begin{aligned}\Rightarrow \|\bar{x}\|^2 &= \|\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}\|^2 = \\ &= (\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}) \cdot (\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}) = \\ &= \bar{y} \cdot \bar{y} + (\bar{x} - \bar{y}) \cdot (\bar{x} - \bar{y}) = \\ &= \|\bar{y}\|^2 + \|\bar{x} - \bar{y}\|^2.\end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2$ respecto un referencialo ortogonal.

$$\|\bar{x}\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



oss $\|\bar{x}\|$ rappresenta la "lunghezza" di $\bar{x}$ ma
è un numero reale; non ha unità di

misura.

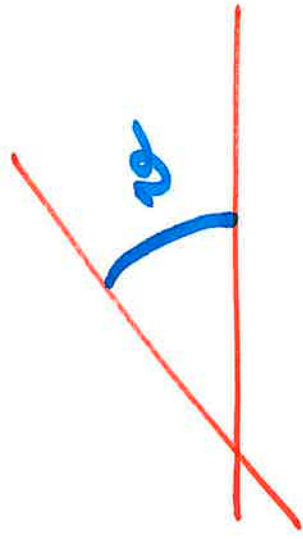
D'altr. canto se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\bar{x} = \alpha \bar{e} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|\bar{x}\| = \alpha \|\bar{e}\|$
e $\bar{x} = \bar{e} + \bar{e} + \dots + \bar{e}$ α volte.

$$\alpha = \frac{1}{h} \text{ con } n > 0 \ n \in \mathbb{N}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{h} \bar{e} \Rightarrow h \bar{x} = \bar{e}$$

~~h~~

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \cos \vartheta$$



In $\mathbb{R}^n$ o comunque in $V_n(\mathbb{R})$

possiamo sempre costruire

basi ortonormali

6/5. $\rightarrow$ si generalizza

e poi poiché A vettore $\ne 0$

ha norma > 0 & quindi

si può normalizzare.

$\Rightarrow$ E sempre basi ortonormali

e rispetto tali basi la matrice del prod. scalare è I

ϑ come rapporto
fra ~~tra~~ le lunghezze
di un arco di circonferenza
colto dall'angolo ed
il raggio della stessa.

Come è fatta una matrice di cambiamento di base fra basi ortonormali per "0.1"?

Sia A una matrice di cambiamento di base fra basi ortonormali e sia I la matrice identità B, B'

Il prod. scalare ha matrice I rispetto

la base $B \Rightarrow$ essa ha matrice ${}^T A I A = {}^T A A$

rispetto la base B'

ma B' è ortonormale $\Rightarrow {}^T A A = I \Rightarrow \boxed{{}^T A = A^{-1}}$
e normale

Def: Una matrice A è detta ortogonale se ${}^T A = A^{-1}$

(basi ortonormali)

oss 1) ${}^T A = A^{-1} \Rightarrow \det({}^T A A) = \det(A)^2 = 1$

$\Rightarrow \det(A) \in \{-1, +1\}.$

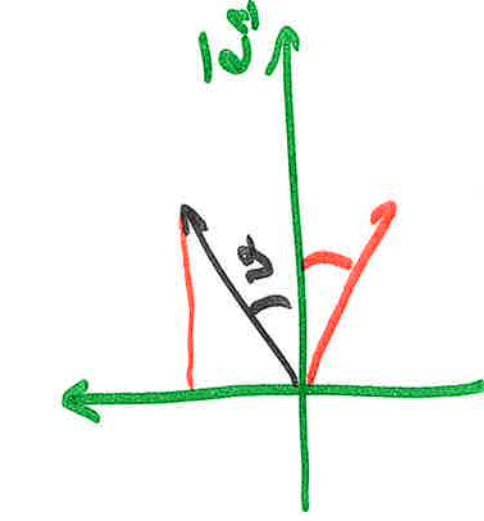
2) ${}^T A = A^{-1}$ implies che sia le righe che le colonne di A sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

Se ${}^T A = A^{-1} \Rightarrow ({}^T A)^{-1} = {}^T A = A.$

3) L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n è un gruppo (non commutativo). $O_n(\mathbb{R})$.

4) Si dice che 2 basi ortonormali hanno la medesima orientazione se $\det(A) = +1$ ed A ortogonale.

⚠ $A \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
 ma $\det(A) = \pm 1 \not\Rightarrow A \in O_n(\mathbb{R})$.



$\bar{e}_2 = \uparrow$

$-\bar{e}_2 = \downarrow$

$$\cos \vartheta = \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_2}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{e}_2\|}$$

$$\cos \vartheta = \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_2}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{e}_2\|}$$

$$\sin \vartheta = \text{proiezione} \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_2}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{e}_2\|} \text{ su } \bar{e}_2 \perp \bar{e}_2$$

$$\det[e_1, e_2] > 0$$

prodotto vettoriale. $\rightarrow$ definito $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$n=3$ $\mathbb{R}$

Siano $\bar{u}, \bar{v} \in V_3^+(\mathbb{R})$ si dice prodotto vettoriale fra $\bar{u}$ e $\bar{v}$ il vettore $\bar{w} \in V_3^+(\mathbb{R})$

tale che $\bar{w} \perp L(\bar{u}, \bar{v})$

(a) $\forall \bar{x} \in V_3^+(\mathbb{R}) \quad \bar{x} \cdot \bar{w} = \text{volume del solido determinato da } \bar{u}, \bar{v}, \bar{x} \text{ (orientato)}$

3) ~~anche il vettore~~ $\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}$ ha la medesima orientazione di $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$B_3 = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$ base di $V_3(\mathbb{R})$.

$\bar{\mu} = (\mu_1 \mu_2 \mu_3)$ in componenti:

$$\bar{\mu} = \mu_1 \bar{e}_1 + \mu_2 \bar{e}_2 + \mu_3 \bar{e}_3$$

$\bar{W} = (w_1 w_2 w_3)$ in componenti:

$$\bar{\mu} \wedge W = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \bar{e}_1 \begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \bar{e}_2 \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \bar{e}_3 \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

$\bar{X} = (\bar{\mu} \wedge W) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \rightarrow$ Volume orientato del solido descritto da $\bar{X}, \bar{\mu}, \bar{W}$.

$$\bar{\mu} \wedge \bar{W} = -\bar{W} \wedge \bar{\mu}$$

$\bar{e}_1' \bar{e}_2' \bar{e}_3'$ orientata come

$$\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \Leftrightarrow \bar{e}_1' \cdot (\bar{e}_2' \wedge \bar{e}_3') > 0$$

N.B. $\bar{x} \circ (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y}) \perp \bar{x}$

e similmente $\bar{y} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y} \perp (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Risoluzione di un sistema lineare di minimi quadrati.

$AX = B$ sistema lineare.

compatibile $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(AB)$

$\Leftrightarrow B \in \mathcal{L}_c(A)$.

$$x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

5 parametri.

$$t=0 \quad (x_0, y_0) \rightarrow x_0 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0 + a_{22}y_0^2 + \dots = 0$$

$$t=1 \quad (x_1, y_1) \rightarrow x_1 + 2a_{12}x_1y_1 + \dots = 0$$

$\vdots$

$$t=k \quad (x_k, y_k) \rightarrow x_k + 2a_{12}x_ky_k + \dots = 0$$

k equazioni in 5 incognite.

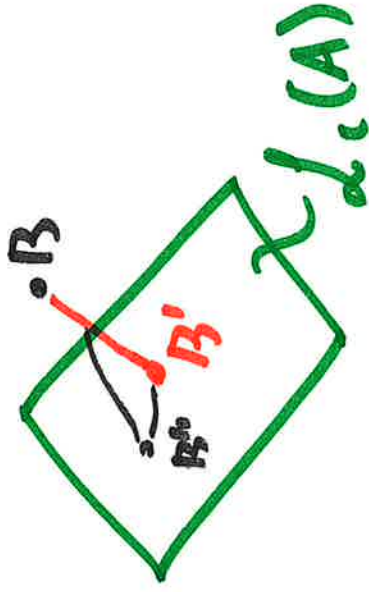
e non ci sono 3 punti allineati $k \leq 5$
di sistemi compatibili

$k > 5$ possono essere sistemi incompatibili.

Se $AX=B$ è incompatibile $\Rightarrow$

consideriamo il sistema $AX=B'$ ove B'
= vettore in $L_c(A)$ più vicino possibile a B .

B' deve essere la proiezione ortogonale di B
sullo spazio vettoriale $L_c(A)$ [la distanza =
distanza euclidea].



$$(B - B') \perp L_c(A)$$

$$(B - B') \in A^\perp$$

Risolvere $AX=B'$

$$\text{con } A(B - B') = 0$$

Sia $\bar{X}$ una soluzione di

$$AX = B' \Rightarrow (A\bar{X} - B) = (B' - B)$$

$$\Rightarrow {}^T A (A\bar{X} - B) = \underline{0} = {}^T A (B' - B)$$

$\Rightarrow \bar{X}$ è soluzione di

$$\boxed{{}^T A A X = {}^T A B}$$

viceversa: supponiamo $\bar{X}$ soluzione di ${}^T A A X = {}^T A B$

$$\Rightarrow {}^T A (A\bar{X} - B) = \underline{0} \Rightarrow A\bar{X} - B \perp L_c(A)$$

$\Rightarrow A\bar{X} - B$ coincide con

$$B' - B$$

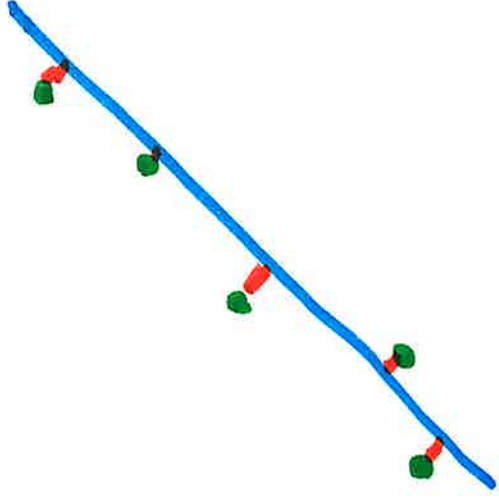
$$\Rightarrow A\bar{X} = B'$$

Risolvere il sistema $AX = B'$ minimizzando $\|B - B'\|$

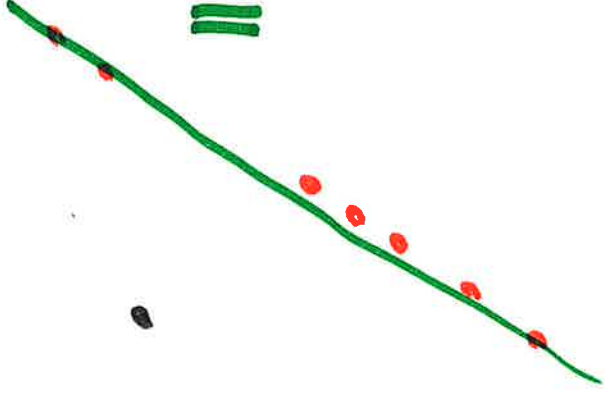
è equivalente a minimizzare il residuo

$$({}^T A A) X = {}^T A B$$

$$\|B' - B\|^2 = (b'_1 - b_1)^2 + \dots + (b'_m - b_m)^2$$



$$\|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x} - \bar{x}\|^2$$



$$\text{risorsa} = \|x\|$$

$AX=B$ risolubile?

$$(B'-B) \perp L_c(A)$$

$AX=B'$ risolubile!

$$B' \in L_c(A)$$

↓
 $\bar{X}$ soluzioni

$$A\bar{X}=B' \Rightarrow (A\bar{X}-B) \perp L_c(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^T A (A\bar{X}-B) = \bar{0}$$

$${}^T A A X = {}^T A B \quad \text{annulla } \bar{X} \text{ come}$$

sol.

